

Scherinterferometrische Präzisionsmethoden — für Gradientenuntersuchungen besonders geeignet

Von

Olof Bryngdahl

Aus dem Institut für optische Forschung, Kgl. Techn. Hochschule, Stockholm 70

Mit 8 Abbildungen

(Eingegangen am 20. Juni 1962)

Eine einfache, schnelle und abbildende scherinterferometrische Methode für Studien von Phänomenen, die Veranlassung für die Entstehung eines Brechungsindexgradienten in optisch durchsichtigen Medien geben, wird beschrieben. Die Methode kann leicht so variiert werden, daß die Interferenzstreifen ein direktes Bild des Brechungsindexgradienten darstellen. Registrierungen einiger Diffusions- und Wärmeleit-Versuche sind wiedergegeben. Die Methoden sind äußerst präzise, da Strahlen, deren Wegunterschied nur einige Wellenlängen beträgt, zur Interferenz gebracht werden.

Einleitung

Bedingt durch die in letzten Jahren rasch vorangegangene Entwicklung hat sich der Wunsch nach verfeinerten Meßmethoden gesteigert. Um diesem Verlangen nach Präzisionsmessungen bei physikalisch-chemischen Vorgängen gerecht zu werden, sollen hier einige neuartige Scherinterferometermethoden beschrieben werden.

Es gibt eine größere Anzahl Methoden, den Brechungsindexgradienten in Flüssigkeiten zu untersuchen. Die Methoden unterscheiden sich hauptsächlich durch die Form, in der die Information zum Beobachter gelangt. Die Genauigkeit einer Methode wird zum größten Teil durch die Fehler, die bei der Auswertung der Interferogramme entstehen, bestimmt. Oft ist es wünschenswert, daß die Methoden nicht grundsätzlich auf der Kenntnis der mathematischen Form des Gradienten aufbauen. Wenn diese aber bekannt ist, sollte sie bei Messungen spezieller Größen, wie z. B. des Diffusionskoeffizienten oder der Temperaturleitzahl, zur Anwendung kommen.

Einige Anforderungen, die an eine Präzisionsmethode gestellt werden, sind folgende: Erstens soll die Apparatur eine scharfe Abbildung der Zelle geben, um Verunreinigungen oder andere Zellunvollkommenheiten kontrollieren zu können und um eine genaue Skalenbestimmung zuzulassen. Zweitens soll sie einfach, leicht zu justieren und für mechanische Vibrationen unempfindlich sein. Schließlich sollen die interferierenden Strahlen nur geringe Wegdifferenzen von einigen Wellenlängen aufweisen.

Mit Hilfe einer *Savartschen* doppelbrechenden Kristallplatte war es möglich, eine scherinterferometrische Apparatur zu entwickeln, die all den obengenannten Ansprüchen Rechnung trägt^{1, 2}. Die Kombination einer sehr einfachen Optik mit außerordentlicher Meßgenauigkeit auf hundertstel Wellenlängen hat Messungen von Diffusionskoeffizienten und Temperaturleitzahlen bis auf 0,2% Ungenauigkeit möglich gemacht^{2, 3}.

I. Die optische Methode

Abb. 1 zeigt eine allgemeine Übersicht der Meßanordnung. Der Eingangsspalt wird durch monochromatisches Licht, das von einer konventionellen Lichtquelle kommt, beleuchtet. Vom Eingangsspalt

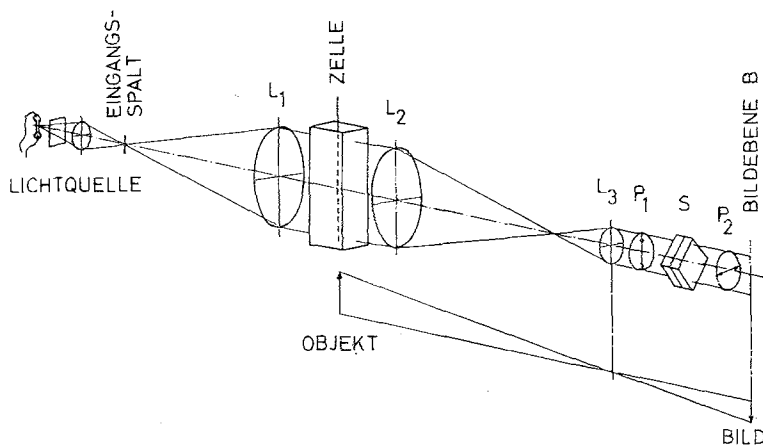


Abb. 1. Übersichtsdarstellung der optischen Scherinterferometermethode. Bezeichnungen s. Text

durch die Zelle bis zur Linse L_3 ist die Meßanordnung die gleiche wie bei den meist angewandten Arten von Interferometern. Die zum Interferometer hinzukommenden neuen Teile sind die beiden Polarisatoren P_1 und P_2 und die *Savartsche* Platte S . Mit Hilfe der Linse L_3 erhält

¹ E. Ingelstam, Arkiv Fysik 9, 197 (1955).

² O. Bryngdahl, Acta Chem. Scand. 11, 1017 (1957).

³ O. Bryngdahl, Arkiv Fysik 21, 289 (1962).

man auf der Ebene B eine scharfe Abbildung der Zelle. Bei dieser Methode wird die Interferenz des polarisierten Lichtes zur Anwendung gebracht. In der Bildebene erscheinen außer der scharfen Abbildung der Zelle auch die Interferenzstreifen.

Die durch das Interferometer laufende Wellenfront wird durch die *Savartsche* Platte (doppelbrechende Doppelkristallplatte) in zwei Wellenfronten aufgespaltet. Das wesentlich Neue der hier zur Anwendung gebrachten Interferenzmethode ist, daß zwei Bilder des Objektes in einer geringen Verschiebung Δx entstehen; Phasen- und Amplituden-Ver-

hältnis zueinander kann auf polarisationsoptische Weise verändert werden.

Die *Savartsche* Platte (vgl. Abb. 2) besteht aus zwei gleich dicken Platten eines doppelbrechenden Kristallplattenmaterials, so zugeschnitten, daß die optische Achse beider Platten

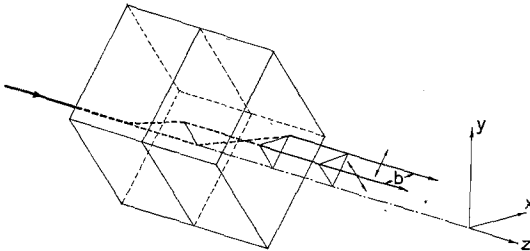


Abb. 2. Strahlengangs-konstruktion durch die *Savartsche* Platte. Polarisationsrichtung der austretenden Strahlen durch Pfeile gekennzeichnet

ein Winkel von 45° zur Normalen der Platte bildet; die Kristallplatten sind in der Art zusammengefügt, daß die Hauptschnitte normal aufeinander stehen. Die Schwingungsrichtungen der beiden Platten fallen nun kreuzweise aufeinander, d. h. die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahles der einen Platte stimmt mit der des außerordentlichen Strahles der anderen in ihrer Schwingung überein; somit wird die optische Wegdifferenz eines parallelen Lichtbündels, das normal zur Oberfläche der Platten einfällt, gleich Null. Dies wird in Abb. 2 dargestellt. Eine absolute Kollimierung des Lichtes ist bei Durchgang durch die *Savartsche* Platte notwendig; dies geschieht, indem L_3 in Richtung der optischen Achse justiert wird. P_1 ist so justiert, daß die Schwingungsebene des einfallenden Strahles den Winkel zwischen den Hauptschnitten der beiden Kristallplatten halbiert. Nun wird auch die einfallende Welle in zwei gleich starke, normal zueinander linear polarisierte Wellenfronten aufgeteilt und diese haben gleicherweise ihre Schwingungsebenen bei 45° gegen die Schwingungsebene der einfallenden, polarisierten Wellenfront, die vom Objekt ausgeht und dessen Phasenstruktur enthält; diese Wellenfronten, die die gleiche Phasenbeschaffenheit wie das Objekt selbst besitzen, sind im gegenseitigen Verhältnis horizontal um eine kleine Strecke $\Delta x = b$, die Größe der Doppelbrechung, seitlich verschoben. Beide Wellenfronten sind im Verhältnis zur einfallenden Welle um $b/2$ in vertikaler Richtung versetzt. Die Interferenz dieser zwei normal

gegeneinander polarisierten Wellenfronten ist durch die Einsetzung eines Analysators P_2 (dessen Schwingungsebene bei 45° im Verhältnis zu den der beiden austretenden Wellenfronten steht) nach der Kristallplatte bedingt. Analysator P_2 ist gewöhnlich normal zum Polarisator P_1 (d. h. gekreuzte Polarisatoren) (vgl. Abb. 1). Die entstehenden Wellenfronten interferieren daher destruktiv oder konstruktiv, je nachdem, ob der Wegunterschied zwischen den beiden Wellenfronten ein ganzzahliges oder halbzahliges Vielfaches der Lichtwellenlänge λ ist.

Die Aufgabe der Linsen L_2 und L_3 ist es, eine Skalenreduktion R zu schaffen, damit die Größe der *Savartschen* Platte im Rahmen zulässiger Grenzen liegt. Der wirkliche Abstand zwischen den Wellenfronten beim Objekt ist nicht b , sondern b/R .

Bezeichnen wir die Brechungszahl der Zellflüssigkeit mit $n(x, y, z)$ und die Zelldicke mit d , so kann die optische Weglänge der Zelle approximiert werden durch

$$W(x, y) = \int_{-d/2}^{+d/2} n(x, y, z) dz. \quad (1)$$

Wir sehen jetzt, daß ein Lichtintensitätsminimum in der Bildebene B erhalten wird, wenn

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = 0, \lambda R/b, 2\lambda R/b, \dots, \quad (2)$$

wobei ΔW der Wegunterschied zwischen den beiden Wellenfronten und R der Skalenfaktor ist³. Nachfolgend wird $R = 1$ gesetzt.

Die optische Aufstellung ist so justiert, daß die Doppelbrechung parallel und der Eingangsspalt normal zum zu untersuchenden Gradienten liegen.

II. Anwendungen der Methode

Diese optische Methode wollen wir nun im Zusammenhange mit einigen physikalisch-chemischen Versuchen zur Anwendung bringen, die der in der mathematischen Physik gewöhnlich vorkommenden parabolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \Delta V \quad (3)$$

genügen. Δ ist der *Laplacesche* Operator im räumlichen Falle.

Diese Gl. (3) läßt sich als Diffusionsgleichung deuten. In diesem Falle entspricht V der Konzentration C der diffundierenden Substanz im Punkte (x, y, z) im Zeitpunkte t und a dem Diffusionskoeffizienten D .

Diese Gl. (3) kann auch als Wärmeleitungsgleichung aufgefaßt werden; sie stellt dann die Wärmeausbreitung in einem homogenen isotropen Medium dar. V bedeutet in diesem Falle die Temperatur T des Punktes (x, y, z) zum Zeitpunkte t und a die Temperaturleitzahl.

Durch eine geeignete Zellkonstruktion [einfache Rand- und Anfangsbedingungen, um ein partikuläres Integral der Gl. (3) zu erhalten] konnte die Konstante a außerordentlich genau mit Hilfe der optischen Scherinterferometermethode ermittelt werden.

1. Bestimmung des Diffusionskoeffizienten D

Eine Küvette, in der die Konzentrationsgradienten nur in x -Richtung vorhanden sind, ist hier zweckmäßig, da eine scharfe Grenzschicht zwischen der Lösung und dem Lösungsmittel bei $t = 0$ mit relativ einfachen Hilfsmitteln erreicht werden kann; siehe z. B.⁴.

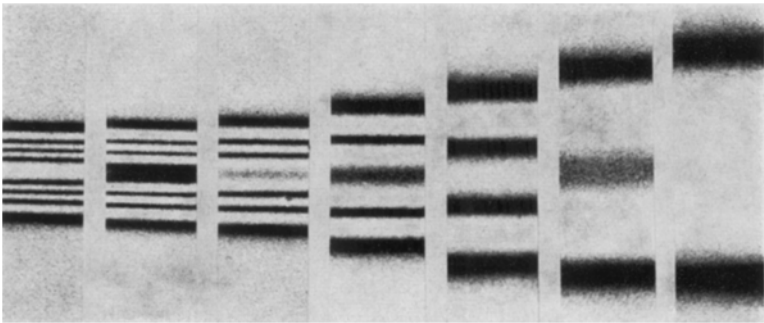


Abb. 3. Aufnahmen eines Diffusionsversuches

Bei $t > 0$ registriert man die Ausbreitung des Konzentrationsgradienten als Funktion der Zeit t .

Die Gleichung für eine eindimensionale Diffusion lautet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Nun wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß der Diffusionskoeffizient konzentrationsunabhängig ist, welches insofern berechtigt ist, da wir mit äußerst geringen Konzentrationsunterschieden (differentielle Diffusionsexperimente) arbeiten — wo dies nicht der Fall ist, wird auf⁵ hingewiesen.

Nach der Gl. (1) erhält man nun folgende Beziehung:

$$W(x, t) = n(x, t) d = \{k_0 + k_1 C(x, t) + k_2 C^2(x, t) + \dots\} d \approx \{k_0 + k_1 C(x, t)\} d, \quad (5)$$

dabei ist n die Brechungsahl, d die Zelldicke in der Richtung der optischen Achse.

Die Gl. (4) kann nun auf folgende Art geschrieben werden.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (6)$$

⁴ O. Bryngdahl, Acta Chem. Scand. **12**, 684 (1958).

⁵ J. Crank, The Mathematics of Diffusion, Oxford 1956.

und die Ableitung der optischen Weglänge sieht nun folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{W_0}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} \exp(-x^2/4Dt), \tag{7}$$

wenn $x = 0$ das Zentrum des Gradienten und $W_0 = W(+\infty, t) - W(-\infty, t)$ darstellt.

Das Interferenzstreifenmuster, welches in der Bildebene (B in Abb. 1) entsteht, kann zur *Gaußschen* Kurve Gl. (7), die einen idealen Konzentrationsgradienten darstellt, in Beziehung gesetzt werden. Mit dieser Methode untersucht man die Interferenzstreifenabstände in ihrer Unterschiedlichkeit mit der Zeit, und wie aus Gl. (2) hervorgeht, entspricht ein bestimmtes Streifenpaar einem bestimmten Wert des Differenzquotienten $\Delta W/\Delta x$, wobei $\Delta x = b$, die Größe der Doppelbrechung ist.

Um D zu ermitteln, setzt man für den Ausdruck $\Delta W/\Delta x$ der Vereinfachung wegen $\partial W/\partial x$. Daß dieser Austausch zulässig ist, geht aus den Relationen zwischen Differenz- und Differentialquotienten, die sich am einfachsten aus einer Reihenentwicklung ergeben, hervor:

$$\left(\frac{\Delta W}{\Delta x}\right)_{\Delta x = b} = \frac{\partial W}{\partial x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m} (2m+1)!} \left(\frac{b}{\sigma}\right)^{2m} H_{2m}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right); \tag{8}$$

hierbei ist $\sigma = \sqrt{2Dt}$ der halbe Abstand zwischen den Inflexionspunkten der *Gaußschen* Kurve, H stellt die *Hermite'schen* Polynome dar. In der Nähe der Inflexionspunkte ist die Korrekionsgröße äußerst klein, und für den Fall, daß $b < 3\sigma$ ist, kann man praktisch über die gesamte Kurve die Korrektion vernachlässigen.

Die Aufzeichnungen eines Diffusionsversuches werden in Abb. 3 dargestellt. Der Abstand zwischen symmetrisch gelegenen Streifenpaaren $2x$ wird gemessen (vgl. 2). Danach kann die Auswertung nach einer der nachfolgenden Arten vorgenommen werden:

1. Zeichnen wir $(2x)^2$ vs t für ein bestimmtes Interferenzstreifenpaar auf, erhalten wir übereinstimmend mit Abb. 4 eine Kurve. Der

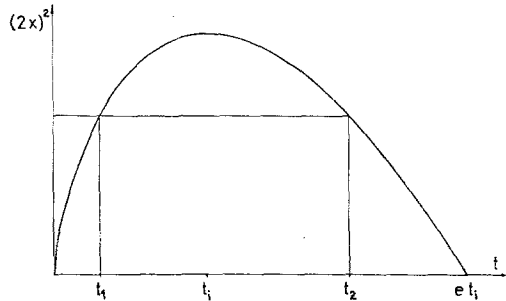


Abb. 4. Quadrat des Streifenabstandes als Funktion der Zeit

Diffusionskoeffizient ergibt sich später aus einem Werte von $(2x)^2$ und seinen entsprechenden Zeitpunkten t_1 und t_2 nach der Gleichung⁶:

$$D = \frac{(2x)^2 (1/t_1 - 1/t_2)}{8 \ln t_2/t_1}. \quad (9)$$

Die Berechnungen nach dieser Methode sowie ein Iterationsverfahren für die Ermittlung der Nullzeitkorrektur ist in ² zu ersehen.

2. Ein einfacheres Evaluierungsverfahren⁷ erhält man, wenn Gl. (7) und (8) in

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \text{konst.} = K \quad (10)$$

eingesetzt werden, wobei sich in Approximation erster Ordnung folgendes ergibt:

$$\exp [x^2/4D (t + \Delta t)] = \frac{W_0}{2K \sqrt{\pi D (t + \Delta t)}} \left(1 + \frac{b^2}{48Dt} \frac{x^2 - 2Dt}{2Dt} \right), \quad (11)$$

dabei ist t die gemessene Zeit und Δt die Nullzeitkorrektur.

Nach Logarithmieren (wobei man für kleine α -Werte die Relation $\ln(1 + \alpha) \approx \alpha$ ausnützt) und Umschreibung (wenn Δt klein ist) ergibt sich

$$\frac{(2x)^2}{t} = K_1 - 8D \ln \frac{t}{t_0} + \frac{1}{t} \left\{ \frac{(2x)^2}{t} - 8D \right\} \left\{ \frac{b^2}{24D} + \Delta t \right\}, \quad (12)$$

hier ist K_1 eine Konstante [$K_1 = 8D \ln(t_i/t_0 + 1)$; t_i = der Zeitpunkt des Durchganges der Inflexionspunkte] und t_0 eine angenommene Zeiteinheit.

Wenn wir nun die Beziehungen

$$\eta = (2x)^2/t; \quad \tau = \ln t/t_0$$

einführen, so kann Gl. (12) in folgender Art formuliert werden:

$$\eta = K_1 - 8D\tau + \frac{\eta - 8D}{t} \left(\frac{b^2}{24D} + \Delta t \right). \quad (13)$$

Wir sehen hier, daß die Abweichung, bedingt durch $\Delta W/\Delta x$, in der ersten Approximation wie eine konstante Ergänzung (erster Ausdruck in der Klammer) zur Nullzeitkorrektur auftritt.

Aus einem Diagramme, entsprechend Abb. 5, wird D aus der Neigung der Linien erhalten.

⁶ O. Lamm, Private Mitteilung.

⁷ O. Bryngdahl und S. Ljunggren, Acta Chem. Scand. **16**, im Druck (1962).

Diese Auswertungsmethoden stellen nicht so hohe Ansprüche an exakte Fokussierung bei den Aufnahmen, da der Streifenabstand $2x$ gemessen wird, und die *Wienersche Schiefe*⁸ beeinträchtigt nicht die Approximation der ersten Ordnung.

2. Bestimmung der Temperaturleitzahl a

Um vom Absolutwerte des Wärmeflusses unabhängig zu werden, ist nur ein nichtstationäres Verfahren anwendbar. Mit dieser optischen Registrierungsmethode ist es unter Verwendung einer günstig geformten Zellkonstruktion möglich, eine Präzisionsmethode aufzubauen. Um alle Arten von Randeffekten umgehen zu können, kam ein Heizdrahtverfahren mit radialer Wärmeströmung zur Anwendung. Die Flüssigkeit befindet sich in einer rechteckigen Glaszelle, in deren Mitte der Heizdraht lotrecht gespannt ist. In der Umgebung des Heizdrahtes

entsteht ein Temperaturgradient; damit ist auch ein optisches Dichtegefälle vorhanden. Mit Hilfe dieser Methode kann der Temperaturgradient direkt untersucht werden und stört dabei nicht den Ablauf des Experimentes. Zu einem bestimmten Zeitpunkte wird Strom durch den Draht geleitet, sodaß eine konstante Wärmeentwicklung auftritt. In der Umgebung des Drahtes bildet sich nun ein mit der Zeit sich veränderndes zylindrisches Temperaturfeld in der Flüssigkeit, die zu Beginn überall die gleiche Temperatur T_0 gehabt hatte. Der Draht ist in Richtung des Schwerfeldes eingespannt, um Konvektion zu vermeiden.

Wir gehen von der Differentialgleichung (3) in Zylinderkoordinaten aus:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r a \frac{\partial T}{\partial r} \right\}, \quad (14)$$

T ist die Temperatur im Abstände r von der Zylinderachse, t die Zeit und a die Temperaturleitzahl der Flüssigkeit. Setzen wir die Wärmeleistung gleich Q (Quotient aus zugeleiteter Wärmemenge und aus Zeit

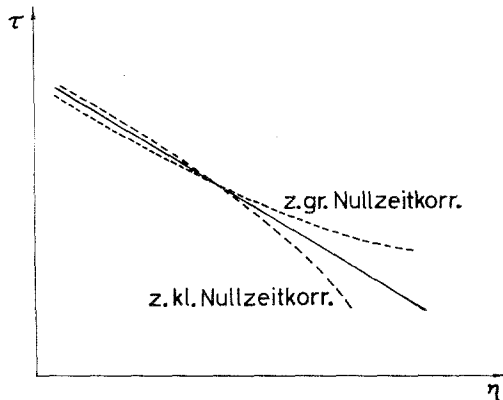


Abb. 5. Diagramm über τ als Funktion von η , wobei eine gerade Linie entsteht, wenn die richtige Nullzeitkorrektur in Gl. (13) eingesetzt wird

⁸ H. Svensson, *Optica Acta* [London] **1**, 25 (1954).

mal Länge), die Wärmeleitfähigkeit gleich Λ und die Relation $a = \frac{\Lambda}{c \rho} =$
 $=$ konstant, $c =$ spezif. Wärme und $\rho =$ Dichte, so erhält das Temperaturfeld in der Umgebung des Drahtes folgende Form:

$$T = T_0 + \frac{Q}{4 \pi \Lambda} \left\{ -Ei(-r^2/4at) \right\}. \quad (15)$$

Dabei ist

$$Ei(-x) = - \int_x^\infty \frac{\exp(-x)}{x} dx.$$

Bei der Anwendung einer optischen Methode muß die entsprechende Brechungszahlvariation bekannt sein, um die Temperaturverteilung als Funktion der Zeit näher untersuchen zu können.

Es wird nun eine Relation zwischen n , r und t gesucht. Die partielle Ableitung der Funktion (15) in bezug auf r ergibt

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{Q}{2 \pi \Lambda r} \exp(-r^2/4at). \quad (16)$$

Da $n = f(T, p)$ und p , der Druck, konstant ist, ergibt sich

$$\frac{\partial n}{\partial r} = - \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_p \frac{Q}{2 \pi \Lambda r} \exp(-r^2/4at). \quad (17)$$

Da es sich hier um eine dreidimensionale (konstant in der y -Richtung, wegen der rotationszylindrischen Symmetrie) Brechungszahlverteilung handelt, muß eine Integration über die Zelldicke d durchgeführt werden. Um die Ableitung zu berechnen, kann man hier ohne weiteres unter dem Integralzeichen differenzieren:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{\partial n}{\partial x} dz = \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dz. \quad (18)$$

Setzt man nun die Ausdrücke $r^2 = x^2 + z^2$ und $\partial r/\partial x = x/r$ und die Gl. (17) in die Formel (18) ein, so gelangt man schließlich zu der Formulierung

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_p \frac{Q}{\pi \Lambda} \int_0^{d/2} \frac{x}{x^2 + z^2} \exp \{ -(x^2 + z^2)/4at \} dz, \quad (19)$$

wenn $\partial n/\partial T$ konstant ist.

Wenn d so groß ist, daß die Glaswände der Zelle den Gradienten nicht stören, ist die Lösung von (19)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_p \frac{Q}{2\Lambda} \{1 - \operatorname{Erf}(x/\sqrt{4at})\} \quad \text{für } x > 0, \quad (20)$$

und

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_p \frac{Q}{2\Lambda} \{-1 - \operatorname{Erf} x/\sqrt{4at}\} \quad \text{für } x < 0,$$

wobei

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\alpha^2) d\alpha$$

das Fehlerintegral ist.

Hier ist die Relation zwischen Differenz- und Differentialquotienten

$$\left(\frac{\Delta W}{\Delta x} \right)_{\Delta x = b} = \frac{\partial W}{\partial x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^{2m}}{2^{2m} (2m+1)!} \frac{\operatorname{Erf}^{(2m)}(x/\sigma)}{1 - \operatorname{Erf}(x/\sigma)}, \quad (21)$$

wobei $\sigma = \sqrt{4at}$ ist. Sobald $b/\sigma < 0,1$ ist, ist die Korrekptionsgröße so minimal, daß man sie vollständig außer acht lassen kann, und mit zufriedenstellender Genauigkeit folgt

$$\left(\frac{\Delta W}{\Delta x} \right)_{\Delta x = b} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

In Abb. 6 wird eine Registrierung eines Versuches gezeigt.

Nach Formel (2) nimmt $\partial W/\partial x$ mit einem bekannten, konstanten Faktor beim Übergange zum nächstliegenden Streifenpaare zu; dieses läßt die Berechnung der Temperaturleitzahl somit zu. Der Abstand des Interferenzstreifens $2x_i$, d. h. der Abstand zwischen symmetrisch zueinander liegenden i -ten Streifenpaaren wird gemessen und ein Diagramm über $(2x_i)^2$ als Funktion der Zeit t wird aufgezeichnet. Mit Hilfe dieser Variablen tritt jedes Streifenpaar als gerade Linie auf. Die Neigungen der auf diese Weise zustandekommenden Linien (die Nullzeitkorrektur ist hier uninteressant) werden benutzt, um die Temperaturleitzahl a zu ermitteln.

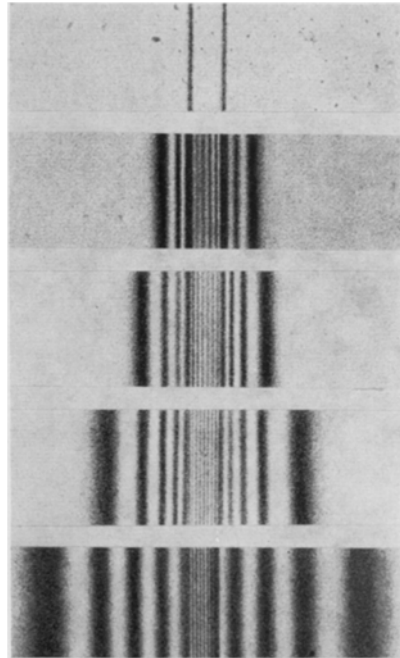


Abb. 6. Aufnahmen eines Wärmeleitversuches

Nach Gl. (20) soll der Ausdruck $x/\sqrt{4at}$ für jedes Interferenzstreifenpaar konstant sein. Wir führen jetzt die Bezeichnung Δ_{ij} , definiert durch

$$\Delta_{ij} = \text{Erf}(x_i/\sqrt{4at}) - \text{Erf}(x_j/\sqrt{4at})$$

ein. Bekannt ist x_i/\sqrt{t} , somit kann Δ_{ij} als Funktion von a betrachtet werden; $\Delta_{ij}(a)$. Wenn man nur drei Interferenzstreifenpaare wie x_1 , x_2 und x_3 hat, so gilt

$$\Delta_{12}(a) = \Delta_{23}(a), \text{ oder } \Delta_{123}(a) = 0,$$

welche eine transzendente Gleichung für die Bestimmung von a darstellt.

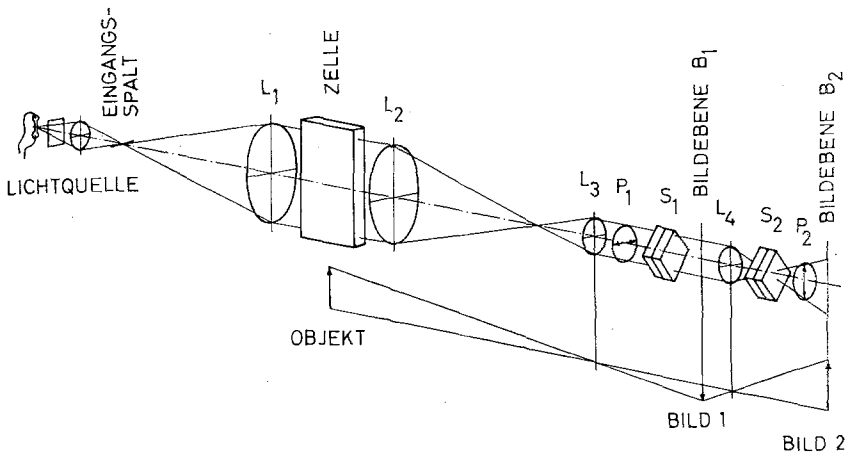


Abb. 7. Übersichtsdarstellung der gradientenregistrierenden Interferometermethode. Bezeichnungen siehe Text

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß nur zwei Größen, nämlich der Abstand der Streifen und die dazugehörige Zeit, die sich beide mit größter Genauigkeit bestimmen lassen, für die Berechnung der Temperaturleitzahl a in der Dimension Länge zum Quadrat durch Zeit, erforderlich sind.

Näheres über die Bestimmung der Temperaturleitzahl und Wärmeleitfähigkeit ist in ³ zu finden.

III. Eine gradientenregistrierende Interferometermethode

Wenn keine *a priori*-Information für die mathematische Form des Gradienten vorliegt, ist es möglich, die bereits beschriebene Meßanordnung auf einfache Art zu vervollständigen⁹, um die Form der Gradientenkurve registrieren zu können. Die ursprüngliche Bildebene B_1 wird mit Hilfe eines Objektivs L_4 auf eine neue Bildebene B_2 abgebildet (vgl. Abb. 7). Nach L_4 wird wiederum eine Savartsche Platte S_2 angeordnet;

⁹ O. Bryngdahl und S. Ljunggren, J. Phys. Chem. **64**, 1264 (1960).

der Analysator P_2 wird von seinem Ausgangsplatz entfernt und hinter S_2 gestellt. In der Bildebene B_2 tritt nun eine Abbildung des Brechungs-
zahlgradienten auf.

In Abb. 8 wird der Brechungs-
zahlgradient von einem Diffusions-,
bzw. einem Wärmeleitversuch, auf den bereits früher hingewiesen worden
ist, wiedergegeben.

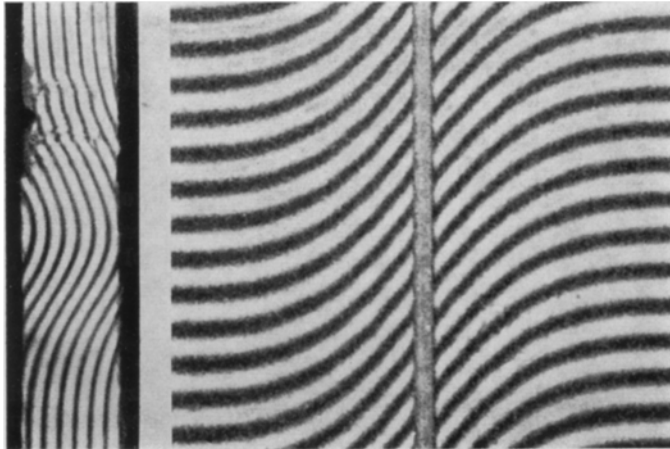


Abb. 8. Aufnahmen eines Diffusions- bzw. Wärmeleitversuches mit der gradientenregistrierenden Interferometermethode

IV. Verwendungsmöglichkeiten

Die in Kap. I beschriebene Methode ist hauptsächlich in dem Falle zu empfehlen, wo die Form des Brechungs-
zahlgradienten bekannt ist; somit ist die Möglichkeit für eine präzise Bestimmung, z. B. des Diffusions-
koeffizienten und der Temperaturleitzahl gegeben.

In anderen Fällen, wie z. B. bei der Elektrophorese und der Ultra-
zentrifugierung, wo eine Kenntnis über die Gradientenkurve nicht vor-
liegt, diese jedoch gerade die gewünschte Information bedeutet, eignet
sich die Methode, die in Kap. III beschrieben ist, besonders gut.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß diese Methoden eine
sehr vielseitige Anwendung auf dem Gebiete der Diffusion, Elektro-
phorese, Sedimentation, Wärmeleitung und Wärmeströmung (Kon-
vektion) geben.